MA1 – řešení 8. domácího úkolu:

1. Vypočtěte limity:

a) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)} \underset{\text{VLSF}}{\overset{(*)}{=}} \lim_{y\to 2} e^{y} = e^2$$

(*) a zřejmě užijeme větu o limitě složené funkce (VLSF), takže spočítáme limitu funkce vnitřní, tj. limitu exponentu:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right) = \text{„}\infty\cdot 0\text{"} \underset{\text{„na podíl"}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{(**)}{=}$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \underset{AL}{=} 1\right)$$

a) („bez l'H. pravidla:")

$$\overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{(***)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{t} =$$

(***) VLSF $\frac{1}{x^2} = t \to 0$ pro $x\to+\infty$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)}{t} = \lim_{t\to 0}\Bigg(\underbrace{\frac{\ln(1+t)}{t}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{\ln(1-t)}{-t}}_{\to 1}\Bigg) = 2$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ – jedna z „tabelových" limit}\right)$$

b) „s l'Hospitalem": asi také lépe až po (***):

$$\underset{(***)}{=} \lim_{t\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}{t} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \underset{\text{l'H.}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1+t}{1-t}\right)}\cdot\frac{(1-t)-(1+t)}{(1-t)^2} \underset{(AL)}{=} 2$$

(Chcete-li „trénovat" derivace, tak můžete samozřejmě „l'Hospitalovat" už (**))

b) $\underline{\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}} \underset{\text{VLSF}}{\overset{(*)}{=}} \lim\limits_{t\to -\infty} t^2 \cdot e^{+t} = „\infty \cdot 0" \lim\limits_{t\to -\infty} \frac{t^2}{e^{-t}} = „\frac{\infty}{\infty}"$

$t = \frac{1}{x} \to -\infty$ (pro $x \to 0-$)

$\underset{l'H.}{=} \lim\limits_{t\to -\infty} \frac{2t}{-e^{-t}} = „\frac{\infty}{-\infty}" \underset{l'H.}{=} \lim\limits_{t} \frac{2}{e^{-t}} = „\frac{2}{\infty}" = \underline{0}$

a asi je vidět, že v (*) je lepe užít $t = -\frac{1}{x}$:

$\lim\limits_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim\limits_{t\to +\infty} t^2 \cdot e^{-t} = „\infty \cdot 0" = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{t^2}{e^{t}} = \dots = 0$

$t = -\frac{1}{x}$ pak pro $x \to -\infty$: $t \to +\infty$

(a navíc je i vidět „převedení na podíl" „lépe")

c) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+1)(\ln(n^2-4) - 2\ln n)} = „\infty \cdot (\infty - \infty)" \underset{H.V.}{=}$

<u>pomocí Heineho věty převedeme na limitu funkce pro $x \to \infty$:</u>

$= \lim\limits_{x\to\infty} (x^2+1)(\ln(x^2-4) - \ln(x^2)) = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{(x^2+1)}_{\to\infty} \underbrace{\ln\Big(\underbrace{\frac{x^2-4}{x^2}}_{\to 1}\Big)}_{\to 0} =$

$= „\infty \cdot 0" = \lim\limits_{x\to\infty} \Big(\ln\big(1-\frac{4}{x^2}\big)\cdot x^2 + \underbrace{\ln\big(1-\frac{4}{x^2}\big)}_{\to 0} \Big) =$

(„na podíl")

nebo lépe dříve

upozornit

$= \lim\limits_{x\to\infty} \Big(\ln\big(1-\frac{4}{x^2}\big) \cdot x^2\Big) = „0 \cdot \infty" = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln\big(1-\frac{4}{x^2}\big)}{\frac{1}{x^2}} =$

lépe - a až tady na podíl

(omlouvám se, pokračování je na další stránce)

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+4t)}{-t} = \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+4t)}{4t}}_{\to 1} \cdot (-4) = -4$$

VLSF

$-\frac{1}{x} = t$, $t \to 0$ pro $x \to \infty$

(VLSF + „T")

Poznámka k užití l'H. pravidla

L'Hospitalovo pravidlo lze užít při výpočtu limity „bez dřívějších" úprav, ale pak je to občas „náročné", je lepší si, pokud to jde a „vidíte to", limitu upravit, a jednodušší limitu, získanou úpravou, pak počítat „L'Hospitalem":

$$\lim_{x\to\infty} (x^2+1)\cdot \ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right) \underset{\text{„na podíl"}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2-4}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{4}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2+1}} =$$

(toto je asi „vidět")

$$\underset{l'H.}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} \cdot 4 \cdot \frac{2}{x^3}}{-\frac{2x}{(x^2+1)^2}} = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}}_{\to 1} \cdot (-4) \cdot \underbrace{\frac{(x^2+1)^2}{x^4}}_{\to 1} \underset{AL}{=} -4$$

(mod „vidíme")

Poznámka!

Kdybychom chtěli i dále „l'Hospitalovat", pak doporučuji počítat l'Hospitalem jen „tu limitu", která je třeba pro užití AL, protože $\frac{-4}{1-\frac{4}{x^2}} \to -4$, v AL „nevadí", takže by zde stačilo počítat l'H. jen $\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2+1)^2}{x^4}$ – to asi dělat nebudeme, ale návod a rada je obecná – pro složitější limity!

nebo c) – opět užijeme Heineho větu a budeme počítat limitu funkce: $a \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)^{n^2} \underset{H.V.}{=} \lim_{x\to\infty} \left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty} e^{x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)}$$

$$\underset{VLSF}{=} \lim_{y\to -\frac{a^2}{2}} e^y = e^{-\frac{a^2}{2}}$$

Dle věty o limitě složené fce – počítáme „limitu exponentu“:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \ln\Big(\underbrace{\underbrace{\cos\big(\underbrace{\tfrac{a}{x}}_{\to 0}\big)}_{\to 1}}_{\to 0}\Big) = „\infty \cdot 0“ = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}} \underset{\substack{VLSF \\ \frac{1}{x}=t\to 0}}{=}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(at))}{t^2} = „\frac{0}{0}“ \underset{l'H.}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(at)}\cdot(-\sin(at))\cdot a}{2t} =$$

$$\underset{\substack{„\text{srovnáme}“ \\ \text{výraz}}}{=} \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{-a}{\cos(at)}}_{\to -a} \cdot \underbrace{\frac{\sin(at)}{at}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{a}{2}}_{\to \frac{a}{2}} \underset{AL}{=} -\frac{a^2}{2}$$

a kdybychom nechtěli použít l'Hospitalovo pravidlo, tak bychom také zvládli limitu (počítat by bylo vhodné od „upravené“):

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos at)}{t^2} = \lim \underbrace{\frac{\ln(\cos at)}{\cos at - 1}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\cos at - 1}{(at)^2}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot a^2 = -\frac{a^2}{2}$$

(VLSF + Tabelí) $\cos at = y \to 1$, $\lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y-1} = 1$

(počítali jsme $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$

2) a) $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$ pro $|x|<1$, $f(x)=0$ pro $|x| \geq 1$:

ve cvičení 7 – cvičení „spojitost funkce" – jsme si ukázali, že f je spojitá i v bodech $x = \pm 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1- \\ x\to -1+}} e^{-\frac{1}{1-x^2}} = 0$

(jinde „je spojitost f zřejmá");

a spojitost derivace $f'(x)$ – zřejmá „opět" bude v intervalu $x \in (-1,1)$ a v $(-\infty,-1)$ a $(1,+\infty)$ – problém bude jen v bodech $x=1$ a $x=-1$ (díky sudosti $f(x)$ a lichosti $f'(x)$ stačí vyšetřit jen v bodě $x=1$):

(i) v $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$: $f'(x)=0$, f' spojitá v $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(ii) v $(-1,1)$:

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot (1-x^2)^{-2} \cdot (-2x) = e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{-2x}{(1-x^2)^2}$$

je zřejmě spojitá v $(-1,1)$ (spojitost elem. fcí, podílu a složené funkce)

(iii) bod – zbývá $x=1$:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1+} 0 = 0$$ (lze užít, neboť f je spojitá v $x=1$ (viz cv. 7))

a $f'_-(1) = \lim\limits_{x\to 1-} f'(x) =$ —||—

$$= \lim_{x\to 1-} \underbrace{(-2x)}_{\to -2} \cdot e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} = \text{„}-2 \cdot 0 \cdot +\infty\text{"} = ?$$

$$\lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-x^2} = \text{„}\frac{1}{0+}\text{"} = +\infty$$

Stačí opět (dle „rady") počítat jen (díky AL)

$$\lim_{x\to 1-} e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2} \underset{\text{VLSF}}{=} \lim_{t\to\infty} e^{-t}\cdot t^2 = \text{„}0\cdot\infty\text{"} \overset{*}{=}$$

(„nevhodné" řešení → lépe – užít VLSF $\frac{1}{1-x^2} = t$, $t \to +\infty$ pro $x\to 1-$)

$$\overset{*}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = \frac{\infty}{\infty} \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{e^t} \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{2}{e^t} = 0$$

nepodíl – je „vidět"

$$\text{tedy i } \lim_{x\to 1-} f'(x) = \lim_{x\to 1-} \underbrace{(-2x)}_{\to -2} \cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2}}_{\to 0} = 0,$$

tedy, ex. $f'(1)=0$ a $f'(x)$ je spojitá v bodě 1.

($f'(1)$ byla „spočítána" limitou $f'(x)$ pro $x\to 1+$ i $x \to 1-$)

a $\lim_{x\to 1+} f'(x) = \lim_{x\to 1-} f'(x) = 0 \; (= f'(1))$

2b) „lehčí příklad" $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$, $x\neq 0$; $f(0)=0$

(i) spojitost f v R: v $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ – spojitost zřejmá (spojitost složené fce a podílu)

v $x=0$: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x} \underset{\text{„T"}}{\overset{*}{=}} \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 0} = 0 = f(0)$ –

(nebo l'H: $\overset{*}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\right) = 0$), tj. f je spojitá i v $x=0$,

tedy, f je spojitá v R

(ii) $$f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot 2x\cdot x - (1+x^2).1}{x^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$$
pro $x \neq 0$

$x=0$: f je spojitá v bodě $x=0$, tedy můžeme „zkusit"

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\Big(\underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{\to 2} - \underbrace{\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}}_{\to 1\ (T)}\Big) = 1$$

<u>tedy, f má derivaci v R, a f' je též spojitá funkce v R.</u>

Ještě si můžeme zopakovat výpočet $f'(0)$ podle definice:

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \underset{(T)}{=} 1$$

$$\left(\text{nebo l'H: } = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}\cdot\cancel{2x}}{\cancel{2x}} = 1\right)$$

2c) $\underline{f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(x-1)^2}}$ a $f'(1)$

$\underline{f(x) = \cos\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}}$ a $f'(0+)$

} byly v dú 7 spočítány dle věty o „dopočítávání" derivací (V 8.24)

naopak, v dú 7 jsem počítala $f'(0+)$ pro druhou z funkcí jen užitím věty 8.24 (protože jste ji ještě neměli v přednášce) – a dle definice:

$$f'(0+) = \lim_{x\to 0+}\frac{\cos\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\cos\sqrt{\frac{x}{1-x^2}}-1}{\frac{x}{1-x^2}}}_{\to -\frac{1}{2}}\cdot\underbrace{\frac{\frac{\cancel{x}\,1}{1-x^2}}{\cancel{x}}}_{\to 1} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{1-x^2}} = t,\ \text{VLSF: } \lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{t^2} = -\frac{1}{2}\right)$$

3) <u>Průběhy funkcí</u> (moje řešení) (a další jsou na „dubce")

a) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

(i) <u>základní vlastnosti fce f:</u>

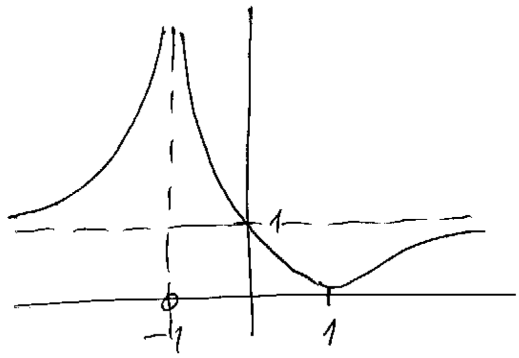
$D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ $\big((x+1) \neq 0\big)$

f je spojitá v D_f, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ – zde je ostré lokální i globální minimum fce, neboť $f(x) \geq 0$ v D_f; $f(0)=1$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{"} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 = \text{„}\frac{4}{0+}\text{"} = +\infty$$

<u>„a odhad" grafu fce</u>



(ii) <u>vyšetření monotonie fce a extrémů:</u>

f má globální i lokální minimum v bodě $x=1$ ($f(1)=0$), glob. maximum fce nemá ($\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$)

intervaly, kde je f rostoucí, resp. klesající – určíme „vyšetřením" $f'(x)$:

$f'(x)>0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je rostoucí v (a,b) (budu značit $\nearrow$)

$f'(x)<0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je klesající v (a,b) (— " — $\searrow$)

$f'(x)=0$ – stacionární body („podezřelé" z extrému)

<u>Při vyšetřování monotonie se „vyplatí":</u>

1) najít nejdříve body, kde $f'(x)=0$, a pak
2) v intervalech, kde $f'(x)\neq 0$ a je spojitá, má $f'(x)$ neměnné znaménko (důsledek věty o nabývání mezihodnot spojité fce v intervalu) – a pak odtud „odvodit" příslušnou „monotonii"
3) extrémy pak lze vyčíst dle monotonie fce v okolí stac. bodu

A zde:

$$f'(x)=\left(\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2\right)'_{\text{derivace složené fce}} = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} =$$

$$= +4\,\frac{(x-1)}{(x+1)^3}$$

$f'(x)=0 \iff x=1$ – ale už víme, že zde je globální minimum (ale potvrdí se to i zde)

pak – zapíšeme přehledně (a jednodušeji snad)!

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
f'	$\frac{-}{-} = \oplus$		$\frac{-}{+}\ \ominus$		$\frac{+}{+}\ \oplus$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

tj. f je rostoucí v $(-\infty,-1)$ a v $(1,+\infty)$,
v $(-1,1)$ je f klesající
(a z toho, že $f \searrow$ v $(-1,1)$ a $\nearrow$ v $(1,+\infty)$ je i „vidět", že v bodě $x=1$ je ostré lokální minimum (a zde i globální)

(iii) vyšetření (pomocí $f''(x)$), kde je funkce konvexní, resp. konkávní, a zda existují inflexní body grafu funkce

platí: $f''(x)>0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je konvexní v (a,b) (budu značit $\cup$)
$f''(x)<0$ v (a,b) $\Rightarrow$ f je konkávní v (a,b) (—"— $\cap$)
$f''(x)=0$ – body „podezřelé" z inflexe – zjistí se podle toho, zda se zde f mění z konvexní na konkávní (nebo obráceně), tj. mění-li v nulovém bodě f'' derivace f'' znaménko, je v tomto bodě inflexe.

a tedy zde!

$$f''(x) = 4\left(\frac{(x-1)}{(x+1)^3}\right)' = 4\,\frac{(x+1)^3-(x-1)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= 4\,\frac{(x+1)-3(x-1)}{(x+1)^4} = 4\,\frac{-2x+4}{(x+1)^4} = -8\,\frac{(x-2)}{(x+1)^4}$$

(poznámka a rada – při výpočtu $f''(x) = \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)''$ lze vždy krátit jmenovatel, upozorňuji proto zvláště, zjednodušíte si počítání $f''(x)$ i jejího vyšetření)

a vyšetření $f''(x)$!

$f''(x) = 0 \iff x = 2$:

		-1		2	
f'':	$+$		$+$		$-$
	$\cup$		$\cup$		$\cap$

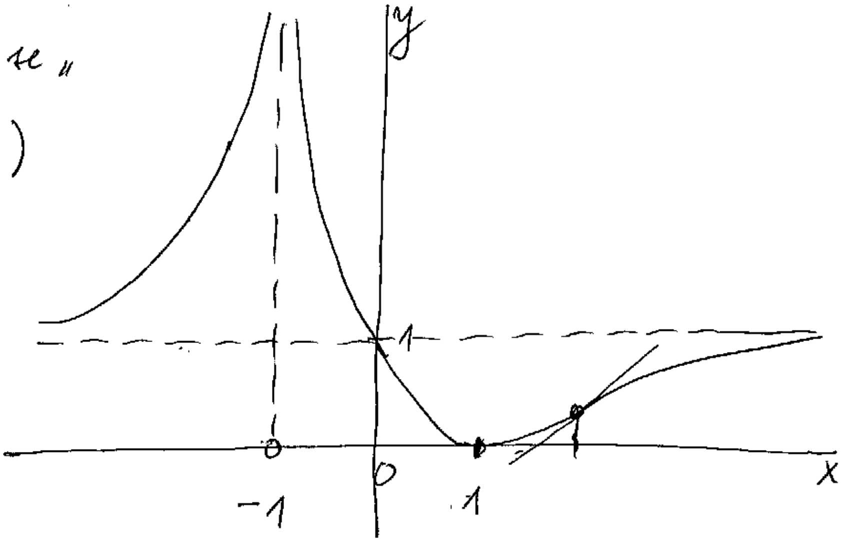
$\Rightarrow$ v bodě $x=2$ má f inflexi $\left(f(2) = \frac{1}{4},\ f'(2) = \frac{1}{2}\right)$

tj. v inflexním bodě má graf tečnu: $y = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(x-2)$;

(iv) náčrt grafu!

(můžeme používat, co „znamená"
pro představu grafu
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ – graf se „blíží" k přímce $y = L$)

zde tedy graf v $\pm\infty$ se „lepí" na přímku $y=1$: (asymptota grafu)



c) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ (ná vyšší stručněji, bez „opakování")

(i) základní vlastnosti fce f:

$Df = \{x \in R;\ x+1 \neq 0\} = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, f je spojitá v Df
(arctg je def. v R) (složená fce – spojitost)

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ($\operatorname{arctg} y = 0 \Leftrightarrow y = 0$)

$f(0) = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$, $Hf \subset H(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

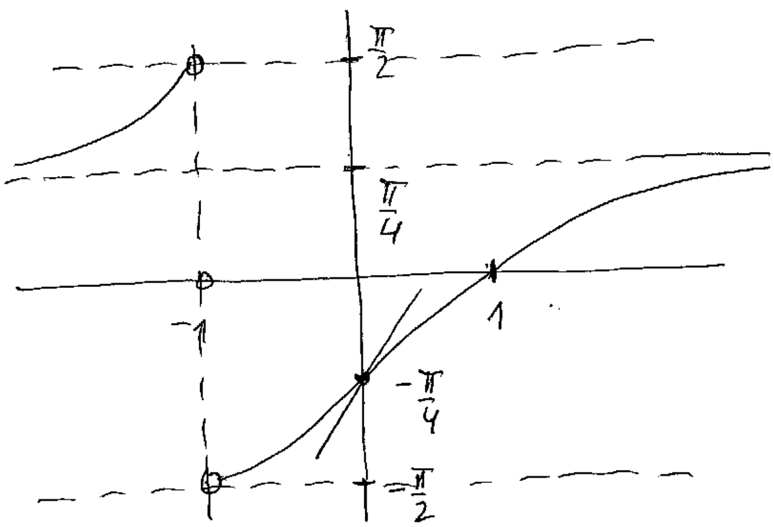
a limity (pro odhad grafu nezbytné)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to 1} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{4} \qquad \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1\right)$$

$$\lim_{x\to -1+} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg} y = -\frac{\pi}{2} \qquad \left(\lim_{x\to -1+} \frac{x-1}{x+1} = „\frac{-2}{0+}" = -\infty\right)$$

$$\lim_{x\to -1-} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \underset{VLSF}{=} \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2} \qquad \left(\lim_{x\to -1-} \frac{x-1}{x+1} = „\frac{-2}{0-}" = +\infty\right)$$

„odhad grafu": – a také náčrtek grafu – „vyplo" nám to:



– pro „graf" je zjištění zajímavá $\lim_{x\to -1\pm} f'(x) = \frac{1}{2}$!

(tj. zde jsou „tečny" limitní" – „se směrnicí" $k = \frac{1}{2}$, stejně také i v bodě $[1,0]$ grafu.

(iii) <u>monotonie, extrémy fce</u> (a $f'(x)$)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+\frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} \cdot \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} =$$

(derivace složené funkce)

$$= \frac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2} = \frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1} = \frac{1}{1+x^2} \ (!)$$

$$\left(= (\operatorname{arctg} x)' \right)$$

<u>Poznámka:</u>

v díl 9 je úloha – $f'(x)=g'(x)$ v intervalu $(a,b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: \ \forall x \in (a,b) \ g(x)=f(x)+c$ (– užitečné u „vyjádření" a existence neurčitého integrálu v přednášce 10)

tedy – („různé") existují konstanty (obecně různé) c_1, c_2, tak, že

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{arctg} x + c_1, \quad x \in (-\infty,-1)$$

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{arctg} x + c_2, \quad x \in (-1,+\infty)$$

a c_1, c_2 umí „teď" lze zjistit – odkud? např. z jedné hodnoty funkce

$f(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\operatorname{arctg} 0 = 0 \Rightarrow$ v $(-1,+\infty)$ je graf $\operatorname{arctg} x$ „posunut" o $c_2 = -\frac{\pi}{4}$, tj.

v $(-1,+\infty)$ je $\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{4}$

---

a v $(-\infty,-1)$ je $\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \operatorname{arctg} x + \frac{3}{4}\pi$

(z limit: $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\pi}{4}$, ale $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$)

<u>A dále jako cvičení užití derivací „jinak"</u>

$f'(x) > 0$ v $(-\infty,-1)$ i v $(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ f je rostoucí funkce v $(-\infty,-1)$ i v $(-1,+\infty)$, nemá stacionární body ($f'(x) \neq 0$ v D_f), je spojitá a všude má derivaci $\Rightarrow$ f nemá lokální extrémy, ani globální (není def. v krajních bodech intervalů z D_f)

(ii) <u>vyšetření, kde je f konvexní, resp. konkávní, inflexní body</u>: (užití $f''(x)$)

opět poznámka před počítáním $f''(x)$ – graf arctg x má inflexní bod v $x=0$ – tj. i „naše" funkce by při $x=0$ měla mít inflexi – když je „jen „posunutá" " – a výpočet:

$$f''(x) = \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' = \underbrace{\left(\left(1+x^2\right)^{-1}\right)'}_{\text{„lépe" „než zlomek je derivovat}} = -\left(1+x^2\right)^{-2}\cdot 2x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}:$$

$f''(x) = 0 \iff x = 0$ (podezření se naplňuje!)

<u>a rozbor</u>:

f''	$+$	-1	$+$	0	$-$
	$\cup$		$\cup$		$\cap$

$\Rightarrow$ v bodě $x=0$ je inflexní bod grafu f,
$f'(0) = 1$
(a tečna $y = x - \frac{\pi}{4}$)

f je konvexní v $(-\infty,-1)$
a v $(-1,0)$, a konkávní v $(0,+\infty)$.

A graf „odpovídá" náčrtku – snad to stačí.

d) $f(x) = (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}$:

(i) $D_f = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$, f je spojitá v D_f, · odhad grafu:

$f(x)=0 \iff x=2$,

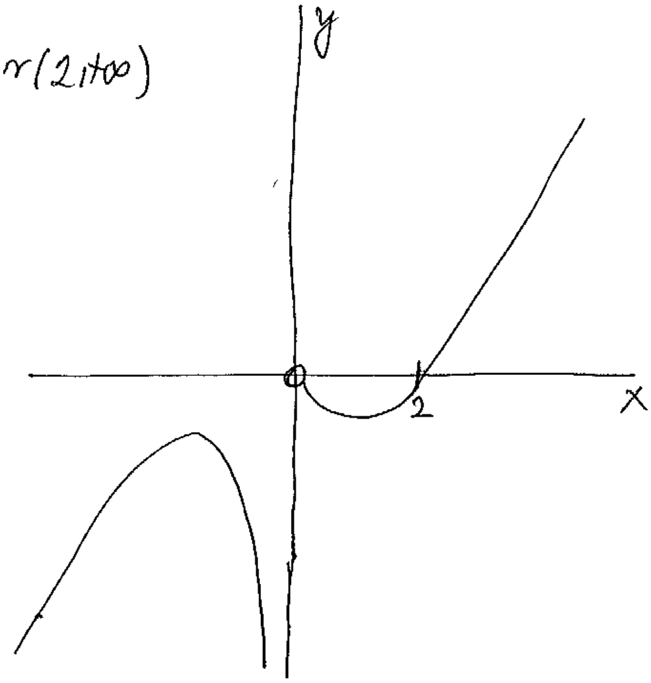
$f(x)<0$ v $(-\infty,0)\cup(0,2)$, $f(x)>0$ v $(2,+\infty)$

$$\lim_{x\to+\infty} (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}\infty \cdot e^{0}\text{"} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}-\infty \cdot e^{0}\text{"} = -\infty$$

$$\lim_{x\to0+} (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}-2 \cdot e^{-\infty}\text{"} = 0$$

$$\lim_{x\to0-} (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}} = \text{"}-2 \cdot e^{+\infty}\text{"} = -\infty$$



(ii) monotonie, extrémy:

z limit $\pm\infty$ v (i) plyne, že f nemá ani globální maximum, ani globální minimum, ale je „vidět" na odhadu grafu, že f bude mít lokální maximum i lokální minimum (plyne opět z „limit" a spojitosti fce, a už „napřed" odhadneji graf bez „špiček" – daná fce má vlastní derivaci v D_f (existuje))

Tedy: $f'(x)$ a její vyšetření:

$$f'(x) = \left((x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}\right)' \underset{(f\cdot g)'}{=} e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)\cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)'}_{\text{složená fce}} =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}} + (x-2)\,e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \underbrace{e^{-\frac{1}{x}}}_{(>0)}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{(>0)}\,(x^2+x-2)$$

(je „dobré" pokud to jde, upravit f' tak, aby šlo dobře vyšetřit znaménko)

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}\,(x^2+x-2)$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=1$

(odpovídá odhadu grafu)

a vyšetření znaménka $f'(x)$ (rozhoduje opět jen x^2+x-2)

f'	$+$	-2	$-$	0	$-$	1	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow$ f je rostoucí v $(-\infty,-2\rangle$
f je klesající v $\langle -2,0)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ v bodě $x=-2$ má f ostré lokální maximum – $f(-2) = -4\sqrt{e}$

a f je klesající v $(0,1\rangle$
f je rostoucí v $\langle 1,+\infty)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ v bodě $x=1$ má f ostré lokální minimum
$f(1) = -\frac{1}{e}$

(omlouvám se za „stručnější" zápis – ale snad to nevadí –
– pečlivě zapsáno (třeba u zápočtu nebo u zkoušky):

$f'(x)>0$ v $(-\infty,-2)$
f je spojitá v $(-\infty,-2\rangle$ $\Big\} \Rightarrow$ f je rostoucí v $(-\infty,2\rangle$

(atd. – jistě si „doplníte" nebo tak pečete)

(iii) intervaly, kde je f konvexní, resp. konkávní, vyšetření inflexních bodů: (pomocí $f''(x)$)

$$f''(x) = \left(e^{-\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)\right)' = \quad (\text{derivace } (fg)' = f'g+fg')$$

(asi nejjednodušší pro výpočet f'' tvar f')

$$= e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right) + e^{-\frac{1}{x}}\left(0-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right) =$$

$$= e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^4}\left(\cancel{x^2}+x-2-\cancel{x^2}+4x\right) = e^{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^4}(5x-2)$$

tj. opět: $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{2}{5}$ – „podezření" na inflexi

a vyšetření f'':

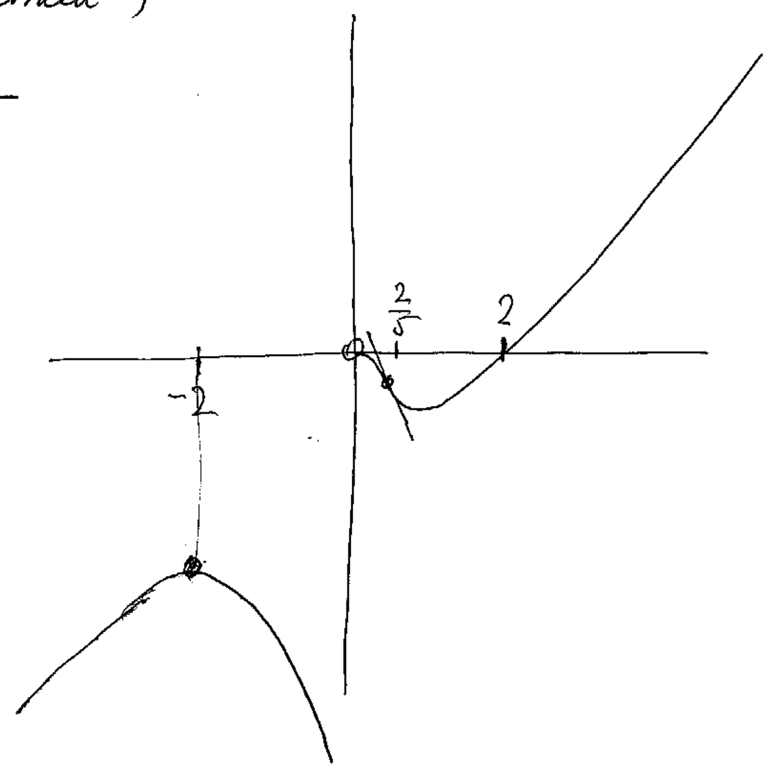
f''	$-$		$-$		$+$
	$\cap$	0	$\cap$	$\frac{2}{5}$	$\cup$

tedy v bodě $x=\frac{2}{5}$ má f inflexi – inflexní bod grafu: $\left[\frac{2}{5}, f\left(\frac{2}{5}\right)\right]$ $\left(f\left(\frac{2}{5}\right)<0\right)$

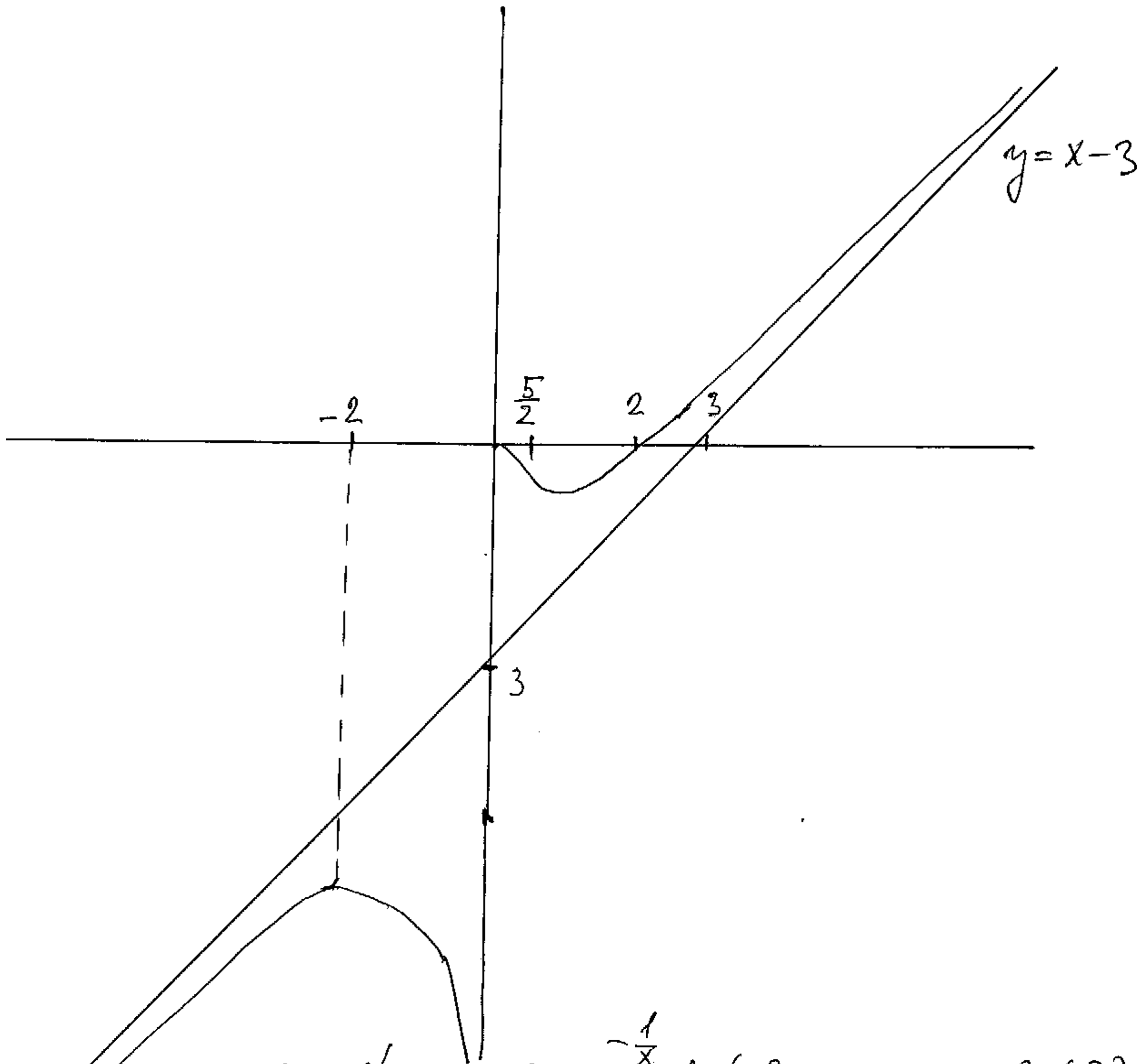
(to jsem „neodhadovala")

Tedy upřesnění grafu:

(náčrtek grafu)



a ještě jedna poznámka (pro případ, že si „nechat" graf nakreslit nějakým programem) –
existuje přímka, která má rovnici $y = x - 3$, nazývá se „šikmá asymptota" grafu fce, ke které se graf přibližuje pro $x \to \pm\infty$ (ale to jsme nepočítali)
Tedy náčrtek grafu „ještě přesněji":



a navíc – $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = \lim e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \underbrace{(x^2+x-2)}_{\to -2} =$ „$0\cdot(-2)$" $= 0$

$$\left(\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} \underset{2\times l'H.}{=} 0 \right)$$

VLSF $\frac{1}{x} = t$, $t \to +\infty$ pro $x \to 0+$

b) (zapomenutý – omlouvám se)

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2}$$

– v jmenovateli fce $((x-1)^2>0)$ rozhoduje čitatel, tak lze snadno vyšetřit fce $f(x)$ i tak, že vyšetříme fci

$$g(x) = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

a pak přejdeme k $-g(x) = f(x)$ pro $2x-1<0$ a $g(x) = f(x)$ pro $2x-1 \geq 0$

Zkusíme tento nápad (ale lze vyšetřit fci přímo s abs. hodnotou – příklady jsou v zadání cvičení, a řešení v „praxi" k příkladům").

Tedy:

(α) $g(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$,
f je spojitá v D_f, $g(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
$g(x)<0$ v $(-\infty,\frac{1}{2})$, $g(x)>0$ v $(\frac{1}{2},1)\cup(1,+\infty)$
$g(0) = -1$

a pro (β): $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{(x-1)^2}$, $D_f = D_g$, $f(x)\geq 0$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$,
f spojitá v D_f,
tedy zde – v bodě $x=\frac{1}{2}$ má f globální minimum

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0, \text{ tj. i } \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \text{„}\frac{1}{0+}\text{"} = +\infty \Rightarrow \text{ i } \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{|2x-1|}{(x-1)^2} = \frac{1}{0+} = +\infty$$

Zde je to „jedno", kterou fci vyšetřujete, derivace ale bude o něco jednodušší.

(ii) $g'(x) = \left(\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}\right)' = \dfrac{2(x-1)^{\cancel{2}} - (2x-1)\,2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} =$

$= \dfrac{2(x-1) - 2(2x-1)}{(x-1)^3} = \dfrac{-2x}{(x-1)^3}\ ,\ x \in D_f$

tedy, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$, a vyšetření: ($g'$ je spojitá v D_f)

f'	$-$		$+$		$-$
	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

tedy g je klesající v $(-\infty, 0\rangle$
klesající v $(1, +\infty)$
a rostoucí v $\langle 0, 1)$

v bodě $x=0$ má ostré lokální i globální minimum,
globální maximum funkce g nemá ($\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$)

Vysvětlení:
globální minimum v bodě $x=0$ je vzhledem k tomu, že $g(0) = -1$, ale $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ a $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$,)
a $x=0$ je jediný stacionární bod

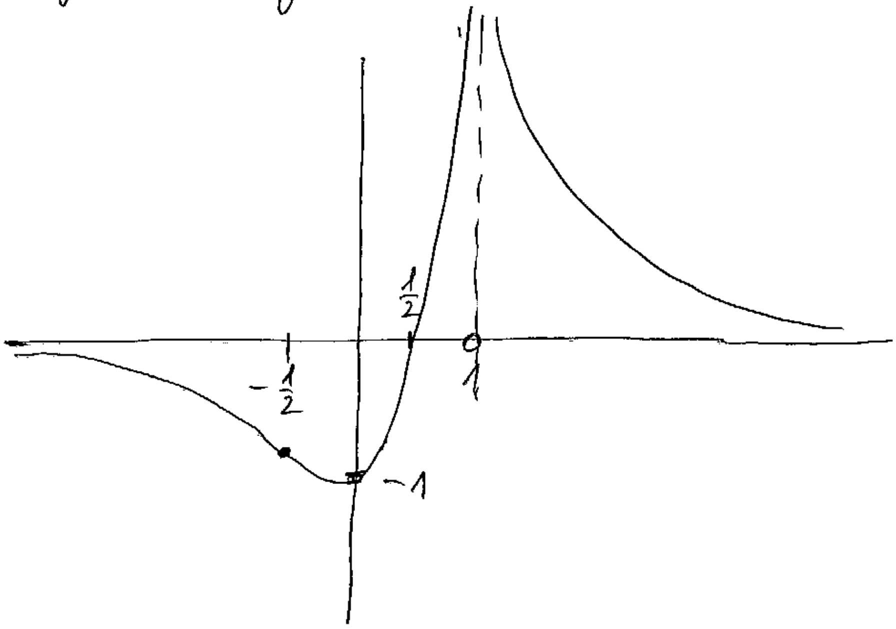
(iii) $g''(x) = -2\left(\dfrac{x}{(x-1)^3}\right)' = -2\,\dfrac{(x-1)^{\cancel{3}} - x\cdot 3\cancel{(x-1)}^{2}}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} =$

$= -2\,\dfrac{-2x-1}{(x-1)^4} = 2\,\dfrac{2x+1}{(x-1)^4}$

$g''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ — bod, „podezřelý" z inflexe

g''	$-$		$+$		$+$
	$\cap$	$-\frac{1}{2}$	$\cup$	1	$\cup$

, tj. fce g má v bodě $x = -\frac{1}{2}$ inflexi a náčrtek grafu fce $g(x)$



a tedy vyšetření fce $f(x)=|g(x)|$:

v $(-\infty,\frac{1}{2})$ je $f(x)=-g(x) \Rightarrow f'(x)=-g'(x)$ a tedy

$f'(x)>0$ v $(-\infty,0) \Rightarrow f$ je rostoucí v $(-\infty,0\rangle$
$f'(x)<0$ v $(0,\frac{1}{2}) \Rightarrow f$ je klesající v $\langle 0,\frac{1}{2}\rangle$
$\Rightarrow f$ má v bodě $x=0$ ostré lokální maximum (globální maximum f nemá – $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$)

v $(\frac{1}{2},0)$, $(0,+\infty)$ je $f(x)=g(x)$, tj. $f'(x)=g'(x)$

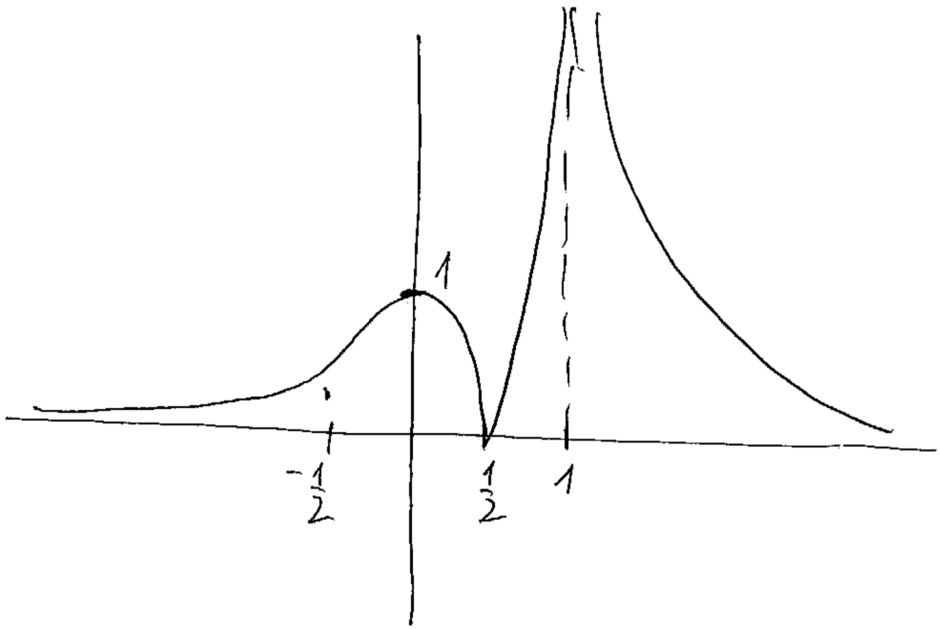
tedy $f(x)$ roste v $\langle\frac{1}{2},1)$ a klesá v $(1,+\infty)$

a zbývá bod $x=\frac{1}{2}$ – máme již vyřešeno – $g'(\frac{1}{2})=8$,

tedy pak $f'_+(\frac{1}{2})=8$, ale $f'_-(\frac{1}{2})=-8$, tedy zde má graf „špičku" – a je to případ, kdy lokální i globální extrém má fce f v bodě, kde neexistuje derivace této funkce.

(a samozřejmě nelze spočítat $f'_\pm(\frac{1}{2})$ „přímo", ze znalosti $g'(\frac{1}{2})$)

A náčrtek grafu fce $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{(x-1)^2}$



(iii) stejné je to i s druhou derivací $f''(x)$:

v $(-\infty, \frac{1}{2})$ je $f''(x) = -g''(x)$, takže

$f''(x)=0 \iff x=-\frac{1}{2}$ opět, jen v $(-\infty, -\frac{1}{2})$ je $f \cup$
a v $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ je $f \cap$

(v $x=-\frac{1}{2}$ je opět inflexe),

dále stejně: $f''(x)=g''(x)$ v $(\frac{1}{2},1) \cup (1,+\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow f''(x)>0$ v $(\frac{1}{2},1)$ a $(1,+\infty)$, tj. v těchto intervalech je funkce konvexní.

Vyšetření fce $f(x) = \dfrac{|2x-1|}{(x-1)^2}$ lze udělat „hned" (bez $g(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$)
tak, že $f(x) = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} \operatorname{sgn}(2x-1)$, nebo rozdělit vyšetření

a uvažovat $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} & \text{pro } x \in [\frac{1}{2}, 0) \cup (0, +\infty) \\ -\dfrac{(2x-1)}{(x-1)^2} & \text{pro } x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \end{cases}$